Ejercicios de Análisis Matemático
Derivadas 1 - Soluciones

Los ejercicios primero y segundo los habéis hecho casi todos por lo que no tiene interés poner sus soluciones. Quizás comentar algún fallo extraño, por ejemplo, hay quien en la regla de la cadena interpreta que $f'(g(x))$ es el producto de f' por $g(x)$. Fallos de este tipo, son básicos. Quien los tiene no sabe lo que es evaluar una función y es imposible que pueda entender nada de nada. Otro fallo, más anecdótico, consiste en afirmar que el área de un círculo es $4\pi r^2$.

Ejercicio 3. Calcula las derivadas primera y segunda de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x)=\begin{cases} x^4 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

¿Qué puedes decir de la derivada tercera?

Solución. Como las funciones seno y $x\mapsto 1/x$ tienen derivadas de todos órdenes en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, su composición $x\mapsto \operatorname{sen}(1/x)$ también es indefinidamente derivable en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Por tanto, la función f es indefinidamente derivable en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ y, en dicho conjunto, sus derivadas sucesivas se pueden calcular con las reglas usuales de derivación. Claramente, en $x=0$ no pueden aplicarse dichas reglas y hay que estudiar directamente la derivabilidad en dicho punto.

Teniendo en cuenta lo dicho, resulta que para valores $x\neq 0$ es $f'(x)=4x^3\operatorname{sen}(1/x)-x^2\cos(1/x)$. Para estudiar la derivabilidad de f en $x=0$ podemos hacerlo aplicando la definición de derivada. Tenemos que:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=x^3\operatorname{sen}(1/x)$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} x^3\operatorname{sen}(1/x)=0$ por ser producto de una función acotada por otra que tiene límite 0, obtenemos que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$$

Hemos probado así que f es derivable en 0 con $f'(0)=0$.

También podemos hacerlo aplicando una consecuencia conocida del teorema del valor medio, la que dice que si *f es una función* continua *en un intervalo I, a es un punto de I, y sabemos que f es derivable en $I\setminus\{a\}$ y que existe $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=L\in\mathbb{R}$, entonces se verifica que f es derivable en a y la derivada de f es continua en a, es decir, $f'(a)=L$.* En nuestro caso, la función f del enunciado está definida en un intervalo $I=\mathbb{R}$, por supuesto es continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ y, como $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ (por ser producto de una función acotada por otra que tiene límite 0), y $f(0)=0$, se sigue que f es continua en $\mathbb{R}$. Como sabemos que es derivable en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ y se verifica que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=0$ (por ser suma de de funciones acotadas multiplicadas por otras que tienen límite 0), deducimos que f también es derivable en 0 y $f'(0)=0$ y, de propina, resulta además que f' es continua en 0.

Estudiaremos ahora la derivada segunda. Para $x\neq 0$ tenemos que $f''(x)=12x^2\operatorname{sen}(1/x)-6x\cos(1/x)-\operatorname{sen}(1/x)$. Para estudiar la derivabilidad de f' en 0 formamos el cociente incremental:

$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=4x^2\operatorname{sen}(1/x)-x\cos(1/x)$$

Como $\lim\limits_{x\to 0}\big(4x^2\operatorname{sen}(1/x)-x\cos(1/x)\big)=0$ (por la misma razón de siempre: suma de funciones acotadas multiplicadas por otras que tienen límite 0), resulta que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=0$$

Hemos probado así que f' es derivable en 0 con $f''(0) = 0$.

Finalmente, como $\lim\limits_{x\to 0}\big(12x^2\operatorname{sen}(1/x) - 6x\cos(1/x)\big) = 0$ (ya debes saber por qué), y la función $\operatorname{sen}(1/x)$ no tiene límite en 0, se sigue que no existe el límite en 0 de $f''(x)$ (porque $\operatorname{sen}(1/x) = f''(x) - 12x^2\operatorname{sen}(1/x) + 6x\cos(1/x)$). Por tanto f'' es discontinua en 0 (tiene una discontinuidad esencial en 0). *Una función que no es continua en un punto tampoco es derivable en dicho punto*, por tanto la derivada tercera de f no existe en $x = 0$. Para $x \neq 0$ la derivada tercera se calcula como de costumbre haciendo usos de las reglas usuales de derivación igual que antes lo hemos hecho para calcular las derivadas primera y segunda. ☺

Comentarios. Un fallo muy extendido consiste en afirmar que como una función es continua también es derivable. Eso es falso, cualquier función continua cuya gráfica tenga puntos angulosos no es derivable en dichos puntos. La función $f(x) = |x|$ es el ejemplo más elemental de función continua en $\mathbb{R}$ que no es derivable en 0. La función $f(x) = \sum_{k=1}^{1000}|x-k|$ es continua y no es derivable en ninguno de los puntos $k = 1, 2, \dots, 1000$. Hay funciones continuas que no son derivables en ningún punto (aunque esos monstruos no te los vas a encontrar sueltos por la calle). Creo que todo esto lo he dicho en clase y, por supuesto, está escrito en el libro de Cálculo diferencial. Lo que sí se cumple es que si una función es derivable en un punto entonces también es continua en dicho punto. Por tanto, ***derivabilidad implica continuidad pero continuidad no implica derivabilidad***. Todo esto viene a cuento de que muchos afirmáis "f es continua y derivable" o "f' es continua y derivable", sin haber estudiado antes la derivabilidad de f o de f', dando a entender que la derivabilidad es consecuencia de la continuidad. Eso es un error importante que debéis corregir.

En matemáticas se dan definiciones y después se obtienen resultados que permiten olvidarse un poco de las definiciones iniciales; por ejemplo, nadie aplica la definición de derivada para estudiar la derivabilidad de una función polinómica o racional, porque hay resultados que garantizan que dichas funciones son derivables en su dominio natural de definición. Pero cuando no podemos aplicar un resultado para derivar una función en un punto, entonces no hay más remedio, ni otro camino, que aplicar la definición de derivada. Esa es la única forma de calcular la derivada segunda en 0 en este ejercicio.

Afirmaciones como "la derivada tercera no existe" no son correctas, lo correcto es decir que "la derivada tercera no existe en 0".

Ejercicio 4. Sea $f : [2,4] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^x$. Justifica que f es una biyección sobre su imagen $[4, 4^4]$ y que su función inversa f^{-1} es derivable. Calcula $(f^{-1})'(27)$.

Solución. Lo razonable es usar el teorema de derivación de la inversa. Dicho teorema afirma que si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función derivable en un intervalo I con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, entonces se verifica que f es una biyección de I sobre el intervalo $J = f(I)$ y la función inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ es derivable en J, siendo para todo $t \in J$:

$$(f^{-1})'(t) = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))}$$

En nuestro caso la función es $f(x) = x^x = \mathrm{e}^{x\log x}$ definida en $I = [2,4]$. La función f es derivable por ser composición de funciones derivables y su derivada viene dada por $f'(x) = \mathrm{e}^{x\log x}(1 + \log x)$. Claramente, para todo $x \in [2,4]$ es $f'(x) > 0$. El resultado antes citado nos dice que f es una biyección sobre $J = f([2,4]) = [f(2), f(4)] = [4, 4^4]$ (donde hemos usado que, por ser la derivada positiva, f es estrictamente creciente en $[2,4]$). Además, la función inversa de f es derivable en J y:

$$(f^{-1})'(27) = (f^{-1})'(3^3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3^3))} = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{27(1+\log 3)}$$

☺

Comentarios. El peor error que hay en este ejercicio es confundir la función inversa f^{-1} con la función $1/f$. Quien hace eso comete un fallo básico y es imposible que entienda nada de nada. Es como si dice que la función inversa de x^3 es $1/x^3$ en vez de $\sqrt[3]{x}$ o que la inversa de la tangente es la cotangente y disparates parecidos. Quien ha tenido ese error afirmando que $f^{-1}(x) = x^{-x}$, el ejercicio no le ha valido nada, lo he calificado directamente con un 0. Hay errores que no se permiten y ese es uno de ellos.

Hay quienes afirman que f es inyectiva sin tener en cuenta dónde está definida. La función f tiene como dominio natural de definición $\mathbb{R}^+$. En $\mathbb{R}^+$ la función no es monótona y no es inyectiva. Su derivada es negativa en $]0, 1/\mathrm{e}[$ y positiva en $]1/\mathrm{e}, +\infty[$. En $1/\mathrm{e}$ la función alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{R}^+$. Todos los valores en el intervalo $]1, f(1/\mathrm{e})[$ los toma en dos puntos distintos.

Algunos se remontan al teorema de Bolzano para probar la sobreyectividad de f. No es preciso. Cada cosa en su momento. El teorema citado arriba se apoya, claro está, en el teorema de Bolzano, y como en el enunciado se pide justificar que la inversa es derivable debemos usar dicho teorema que nos proporciona todo lo que necesitamos.

Algunos confunden el "teorema del valor medio" con el "teorema del valor intermedio". Fallos básicos muy graves: no saber lo que es una función inyectiva y no saber lo que es una función.

Ejercicio 5. Calcula la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en un punto $\left(a, \sqrt{1-a^2}\right)$ y comprueba que dicha recta corta a la circunferencia en un único punto.

Solución. La circunferencia está formada por dos gráficas, la de la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (la parte superior de la circunferencia) y la de la función $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$ (la parte inferior), ambas funciones definidas en $[-1, 1]$. Como el punto que nos dan está en la parte superior consideramos la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. La tangente en un punto $(a, f(a))$ es la recta de ecuación $y - f(a) = f'(a)(x-a)$. En nuestro caso:

$$y - \sqrt{1-a^2} = -\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}(x-a) \iff y\sqrt{1-a^2} - 1 + a^2 = -ax + a^2 \iff ax + \sqrt{1-a^2}\, y = 1$$

Observa que la función f no es derivable en -1 ni en 1, por lo que en el cálculo anterior debemos considerar que $a \neq \pm 1$. La intersección de la recta tangente con la circunferencia se obtiene resolviendo respecto a las variables x e y el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} ax + \sqrt{1-a^2}\, y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{1-ax}{\sqrt{1-a^2}} \\ x^2 + \dfrac{(1-ax)^2}{1-a^2} = 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{1-ax}{\sqrt{1-a^2}} \\ (x-a)^2 = 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} y = \sqrt{1-a^2} \\ x = a \end{array}\right.$$

☺

Comentarios. Equivocaciones al derivar. Considerar innecesariamente las dos gráficas que forman la circunferencia. Pero lo peor es el uso de notaciones disparatadas que llevan al error de forma segura. Me refiero a quienes escriben $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ y la recta tangente la escriben como:

$$y - f(a) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}(x-a)$$

Eso no es la ecuación de una recta. Otros "derivan implícitamente" la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ para obtener que $2x + 2yy' = 0$, de donde resulta que $y' = -x/y$, por lo que la ecuación de la recta tangente será:

$$y - y(a) = -\frac{x}{y}(x-a)$$

En esta disparatada notación la letra "x" tiene dos significados diferentes: es la variable de la ecuación que representa la recta tangente y es la primera coordenada de un punto genérico de la circunferencia. Lo mismo puede decirse de la letra "y". Ninguno de los que ha usado esta notación ha hecho bien este ejercicio (ni el siguiente). Yo he insistido en clase en la importancia de usar una buena notación para el punto de la curva en el que estamos calculando la tangente, pero como si nada.

Otro fallo es el siguiente. Lee con atención a ver si lo descubres. Vamos a calcular la tangente en un punto de la parte inferior de la circunferencia. Sea este punto (u, v). Debemos considerar la función $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$. La ecuación de la recta tangente será:

$$y - g(u) = g'(u)(x-u) \iff y - v = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}(x-u) = \frac{u}{v}(x-u) \iff yv - xu = v^2 - u^2$$

donde hemos usado que $\sqrt{1-u^2} = \sqrt{v^2} = v$. Pero puedes comprobar que la recta obtenida no es, ni mucho menos, tangente a la circunferencia. ¡Esa función raíz cuadrada…!

Ejercicio 6. Calcula un punto de la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ tal que la tangente en dicho punto a la elipse pase por el punto $(2, 4)$.

Solución. Sea (u, v) un punto genérico de la elipse. Se verificará que $\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{9} = 1$, o sea, $9u^2 + 4v^2 = 36$. Calculemos la tangente a la elipse en dicho punto. Si usamos la ecuación de la elipse para expresar la ordenada y como función de la abscisa x obtendremos dos funciones, definidas en el intervalo $[-2, 2]$, correspondientes a la parte superior e inferior de la elipse. Si φ es una de estas funciones se verificará la identidad:

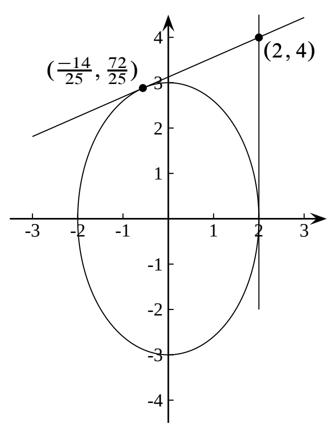
$$\frac{x^2}{4} + \frac{\varphi(x)^2}{9} = 1$$

Derivando esta identidad se obtiene:

$$\frac{x}{2} + \frac{2\varphi(x)\varphi'(x)}{9} = 0 \Longrightarrow \varphi'(x) = -\frac{9x}{4\varphi(x)}$$

En un punto (u, v) se tiene que $v = \varphi(u)$ (habrá que elegir la función apropiada dependiendo de que v esté en la parte superior o en la parte inferior de la elipse). Por tanto, la ecuación de la recta tangente será:

$$y - \varphi(u) = \varphi'(u)(x-u) \iff y - v = -\frac{9u}{4v}(x-u) \iff 9ux + 4vy = 9u^2 + 4v^2 = 36 \iff \frac{ux}{4} + \frac{vy}{9} = 1$$



La ventaja de representar así la recta tangente es que dicha ecuación sentido cualquiera sea el punto (u, v) de la elipse y no depende de la función φ. Observa que si $x = 2$ entonces $\varphi(x) = 0$ por lo que φ no es derivable en $x = \pm 2$. Los puntos correspondientes de la elipse son $(\pm 2, 0)$ en los cuales la tangente es una recta vertical que no puede representarse en la forma $y - \varphi(u) = \varphi'(u)(x-u)$, pero que sí puede escribirse como $\frac{ux}{4} + \frac{vy}{9} = 1$ haciendo $v = 0$ y $u = \pm 2$ con lo que se obtienen las rectas $x = \pm 2$.

Sea como sea, una vez obtenida la recta tangente (que no tiene por qué hacerse como yo lo he hecho sino que pueden considerarse por separado cada caso, lo haremos así al final), se trata de calcular (u, v) por la condición de que dicha recta pase por el punto $(2, 4)$. Por tanto impondremos que el punto $(2, 4)$ esté en la tangente, es decir, debe verificarse que:

$$\frac{2u}{4} + \frac{4v}{9} = 1 \iff 9u + 8v = 18$$

Los puntos de la elipse buscados deben verificar las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 9u+8v=18 \\ 9u^2+4v^2=36 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u=2-\dfrac{8v}{9} \\ 9\left(2-\dfrac{8v}{9}\right)^2+4v^2=36 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u=2-\dfrac{8v}{9} \\ 25v^2-72v=0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (u,v)=(2,0) \\ (u,v)=\left(\frac{-14}{25},\frac{72}{25}\right) \end{array}\right.$$

Puede comprobarse ahora que dichos puntos efectivamente están en la elipse. ☺

Comentarios. Fallos elementales al derivar. Mala notación que lleva a confundir unas variables con otras. Fallos elementales de cálculo por no simplificar.

Hagamos el ejercicio considerando las dos posibilidades, es decir, las funciones cuyas gráficas son la parte superior e inferior de la elipse. Pongamos $f(x)=\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$, $g(x)=-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$. Ambas funciones definidas en el intervalo $[-2,2]$. La tangente en un punto de la forma $(a,\frac{3}{2}\sqrt{1-a^2})=(a,f(a))$ (en la parte superior) viene dada por $y-f(a)=f'(a)(x-a)$, es decir:

$$y-\frac{3}{2}\sqrt{4-a^2}=\frac{-3a}{2\sqrt{4-a^2}}(x-a) \Longleftrightarrow 2\sqrt{4-a^2}\,y+3ax=12$$

La tangente en un punto de la forma $(a,\frac{-3}{2}\sqrt{1-a^2})=(a,g(a))$ (en la parte inferior) viene dada por $y-g(a)=g'(a)(x-a)$, es decir:

$$y+\frac{3}{2}\sqrt{4-a^2}=\frac{3a}{2\sqrt{4-a^2}}(x-a) \Longleftrightarrow -2\sqrt{4-a^2}\,y+3ax=12$$

Observa que, representando por (a,b) el punto de la elipse ($b=\pm\frac{3}{2}\sqrt{1-a^2}$), en ambos casos la ecuación puede escribirse como $3ax+\frac{4}{3}by=12$, es decir, $\frac{ax}{4}+\frac{by}{9}=1$. La misma obtenida anteriormente.

En el ejercicio 7 se trataba de calcular unas derivadas. Casi todos lo hacéis bien. Hay fallos en la derivación de la función $(2+\operatorname{sen}^2 x)^{\operatorname{arc\,tg} x}$ pero son por pereza, por no tomar logaritmos y derivar como está mandado. Casi nadie simplifica las derivadas. La derivada de la función $\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg}(1/x)$ es cero. Sin embargo dicha función no es contante, en $x=1$ vale $\pi/2$ y en $x=-1$ vale $-\pi/2$. ¿Sabes explicar lo que pasa? También hay algunos fallos básicos como, por ejemplo $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^2 x)=\operatorname{sen}^3 x$.

En general, muchos usáis notaciones disparatadas que solamente sirven para confundir los conceptos. Haríais bien en no usarlas y seguir las notaciones que usamos en clase. Expresiones como $f(1^+)$ o “valor por la derecha de f en 1”, evaluar funciones en infinito $e^{-\infty}$, $\operatorname{arc\,tg}(+\infty)$, o escribir cosas como $1/0^+$ o $1^-/0^+$ y otras sutilezas no sé dónde podéis haberlas aprendido. No de un matemático, desde luego. Los matemáticos, lamentablemente, no sabemos nada de magia numérica. Eso se queda para los aficionados al esoterismo y las ciencias ocultas.